Reemplazando la salida C(s) en función de R(s) obtenemos, la expresión para el cálculo del error actuante:

$$E_a(s) = \left[\frac{1}{1+G(s)H(s)}\right]R(s)$$

Este error actuante, podría considerarse como el que se obtendría de un sistema de realimentación unitaria como el indicado en la figura 9.

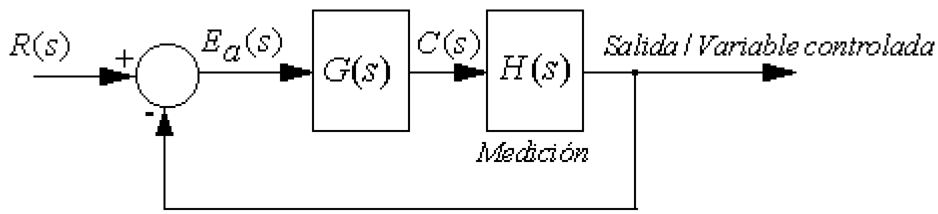

Fig. 9. Sistema equivalente de realimentación unitaria mostrando Ea(s).

Al sistema representado por el diagrama en bloques de la figura 9, se le puede aplicar todo lo dicho respecto de los sistemas de realimentación unitaria, en cuanto al cálculo del error, tipos de sistemas y coeficientes de error.

Comentario: Considerar como error del sistema al "error actuante", significa tomar como salida del sistema la medición de la variable controlada verdadera, es decir H(s)C(s), la cual se compara con la referencia R(s).

Conclusión:

Desde el punto de vista teórico cualquiera de los dos errores definidos como "verdadero" o "actuante", pueden considerarse como correctos. No obstante hay que tener bien presente cuál es la variable que se toma como salida del sistema, ya que si se pierde de vista este concepto pueden presentarse dificultades en la interpretación del "error en estacionario", tipos de sistema y coeficientes de error, como así también sobre la interpretación y análisis de los resultados obtenidos con sistemas reales en la práctica.

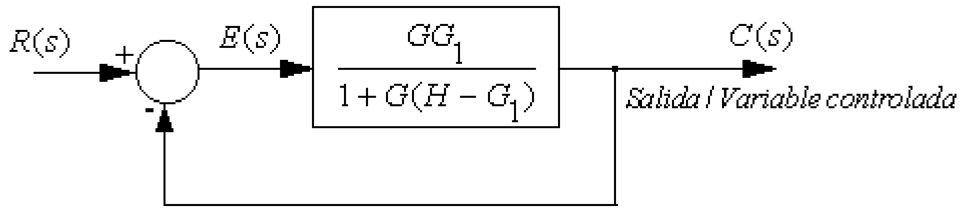

Figura 7. Diagrama en bloques reducido de realimentación unitaria.

Calculando el error verdadero, en el diagrama de la figura 7, obtenemos el mismo resultado que el ya obtenido precedentemente.

$$E(s) = \left[\frac{1 + G(H - G_1)}{1 + GH} \right] R(s)$$

Al sistema de realimentación unitaria de la figura 7 le aplicamos todo lo ya dicho respecto al error verdadero en régimen estacionario, tipo de sistemas y coeficientes de error.

<u>Comentario:</u> Considerar como error del sistema al "error verdadero", significa tomar como salida del sistema la variable controlada verdadera, es decir C(s), la cual se compara con la referencia R(s).

<u>b) Error actuante.</u>

Para considerar el error actuante, el diagrama en bloques de la figura 5, conviene dibujarlo como indica la figura 8.

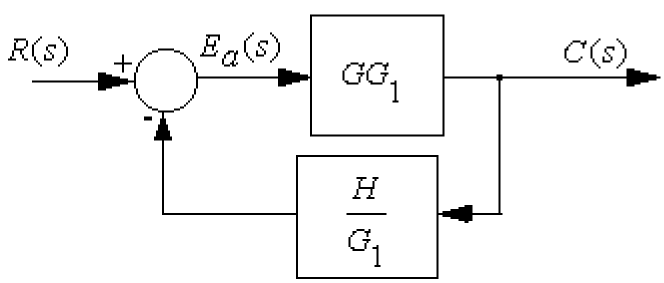

Figura 8. Indicación del error actuante.

El error actuante está dado por:

$$E_a(s) = R(s) - \frac{H(s)}{G_1(s)} C(s)$$

Sistemas con realimentación no unitaria
a) error verdadero.
El caso general se indica en la figura 5.

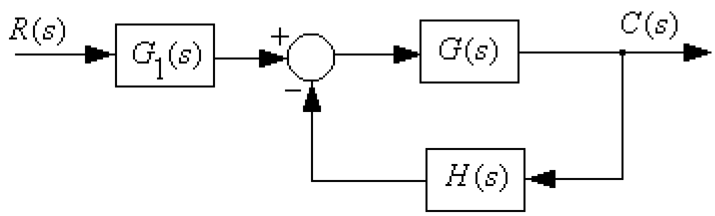

Figura 5. Sistema SISO con realimentación no unitaria

El error verdadero es:

$$E(s) = R(s) - C(s) = R(s) - G_1(s)\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}R(s)$$

$$E(s) = \left[\frac{1+G(H-G_1)}{1+GH}\right]R(s)$$

El cálculo efectuado con el error verdadero, es similar a considerar una adecuación del diagrama en bloques indicado en la figura 5, tal como se muestra en la figura 6.

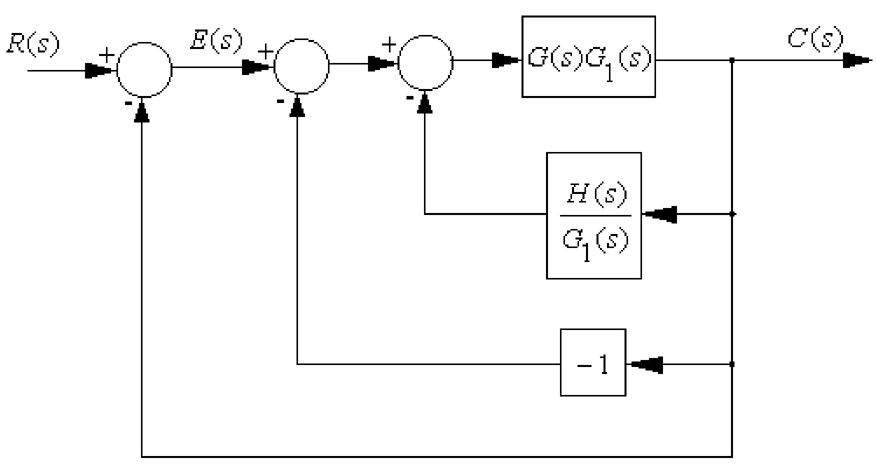

Figura 6. Diagrama en bloque equivalente.

Reduciendo el diagrama en bloque equivalente precedente, obtenemos el indicado en la figura 7.

$$i_a = \frac{0.3\text{x}0.1}{K_T}\ [A] \quad \Rightarrow \quad e_{a_{Total}} = e_a + \frac{0.3\text{x}0.1}{K_T} R_a\ [V]$$

El diagrama en bloques tiene el aspecto indicado en la figura 4:

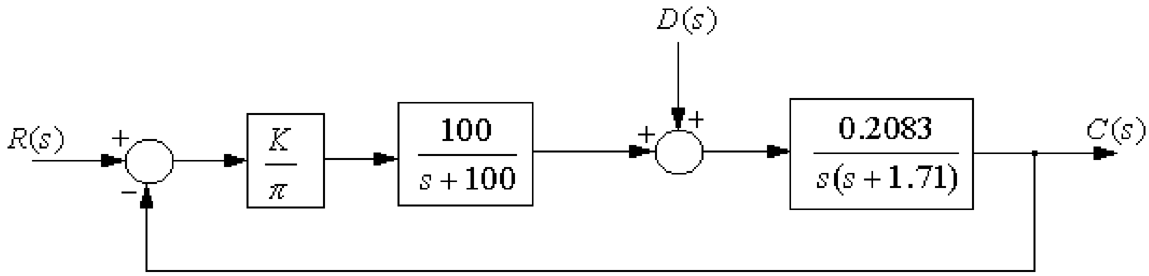

Figura 4. Diagrama en bloques del control de posición.

Donde la perturbación D(s) es un escalón de 0.48 V, obtenido con la fórmula precedente. ¿Cómo afecta esto al error en estacionario?. Como indica la figura 4 el error en estacionario está dado por.

$$e(\infty) = e_R(\infty) + e_D(\infty)$$

El error debido a la perturbación lo calculamos con la relación ya deducida:

$$e_D(\infty) = -\frac{1}{\lim\limits_{s \to 0} \frac{1}{G(s)} + \lim\limits_{s \to 0} G_c(s)}$$

Para nuestro caso será:

$$e_D(\infty) = \frac{0.48}{\lim\limits_{s \to 0} \frac{s(s+1.71)}{0.2083} + \lim\limits_{s \to 0} \frac{K.100}{\pi(s+100)}}$$

$$= -\frac{0.48\pi}{K}$$

El cálculo realizado muestra que aumentando la ganancia del controlador, se disminuye el efecto de la perturbación sobre nuestro sistema de control automático.

Error en estacionario debido a perturbaciones.

Cuando sobre el sistema actúa una perturbación, además de la referencia, el sistema se presenta como indica la figura 3.

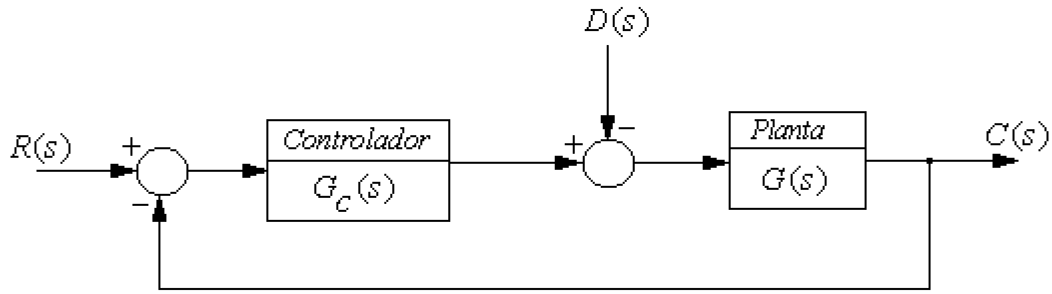

Figura 3. Sistema con perturbación

El error debido a la perturbación está dado por.

$$E(s) = -C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)G_c(s)} D(s)$$

Si la perturbación es de forma escalón unitario el error en estacionario se determina mediante:

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{G(s)}{1 + G(s)G_c(s)} \frac{1}{s}$$

$$e(\infty) = \frac{1}{\lim_{s \to 0} \frac{1}{G(s)} + \lim_{s \to 0} G_c(s)}$$

La perturbación es usualmente una carga que actúa sobre el sistema fuera del modelo normal. Supóngase, por ejemplo, que nosotros hemos implementado el control de posición de una antena. Nosotros debemos esperar que no haya error de posición, debido al polo del origen creado por el motor. Perfecto!. Ahora, supongamos que se levanta viento, dando lugar a la aparición de una cupla sobre la antena de 0,3 Nm, desplazando la antena de su set-point. Esta cupla se conoce como *"cupla de perturbación",* la cual impactará sobre el error en estacionario.

El camino más simple para modelar la perturbación es llevar su influencia a la entrada del modelo de la planta. En este caso la cupla de perturbación reducida por la relación de engranajes, aparece sobre el eje del motor, generando una corriente de perturbación que a su vez lleva a una tensión de perturbación en la entrada:

<u>Ejemplo.</u>
<u>a)Dado el error calcular la ganancia (problema inverso).</u>

Sea el sistema de realimentación unitaria, cuya planta tiene la transferencia:

$$G(s)=\frac{K}{(s+1)(s+2)}$$

Hallar el valor de K de manera que el error en estacionario sea e(∞) < 0.1
Solución:
El sistema es tipo cero, de manera que el error es:

$$e(\infty)=\frac{1}{1+K_0}, \quad donde \quad K_0=\lim_{s\to 0} G(s)$$

$$\frac{1}{1+K/2}=\frac{2}{2+K}\leq 0.1 \Rightarrow K\geq 18$$

<u>b)Dado el sistema calcular los errores (Problema directo)</u>
Considere el sistema con realimentación unitaria, cuya planta es:

$$G(s)=\frac{K(s+3.15)}{s(s+1.5)(s+0.5)}$$

Determine el error en estacionario cuando el sistema es excitado con diferentes tipos de entradas.

- Entrada escalón ⇒ e(∞)=0
- Entrada rampa:

$$e(\infty)=\frac{1}{K_1}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} sG(s)}=\frac{1}{K\frac{(3.15)}{(1.5)(0.5)}}=\frac{1}{4.2K}$$

En este caso e(∞), puede regularse, ajustando K.

- Entrada parábola ⇒ e(∞)= ∞

Sistema tipo “3” y superiores

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+\frac{K_3'\prod(s+z_j)}{s^3\prod(s+p_i)}} \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s^2 G(s)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

<u>Resumen:</u> Una entrada parábola puede ser seguida sin error en estacionario por los sistemas tipo tres y superiores.

<u>Coeficientes de error.</u>

Se definen los coeficientes de error como:

Coeficiente de error al escalón: $\text{c.e.e} = K_p = \dfrac{1}{1+K_0}$

Coeficiente de error a la rampa: $\text{c.e.r}=\text{K}_\text{v} = \dfrac{1}{K_1}$

Coeficiente de error a la parábola: $\text{c.e.p}=\text{K}_\text{a} = \dfrac{1}{K_2}$

Resumiendo los resultados obtenidos en un cuadro de valores

Error en estado estacionario para sistemas de realimentación unitaria				
Tipo de Sistema	Impulso $[\mathrm{R(s)=1}]$	Escalón unitario $[R(s)=1/s]$	Rampa unitaria $[R(s)=1/s^2]$	Parábola unitaria $[R(s)=1/s^3]$
0	0	$\frac{1}{1+K_0}$	∞	∞
1	0	0	$\frac{1}{K_1}$	∞
2	0	0	0	$\frac{1}{K_2}$

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+\frac{K_0'\prod(s+z_j)}{s^0\prod(s+p_i)}}\frac{1}{s^2}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} sG(s)}=\frac{1}{0}=\infty$$

Sistema Tipo “1”

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+\frac{K_1'\prod(s+z_j)}{s^1\prod(s+p_i)}}\frac{1}{s^2}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} sG(s)}=\frac{1}{K_1}$$

Sistema Tipo “2” y superiores

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+\frac{K_2'\prod(s+z_j)}{s^2\prod(s+p_i)}}\frac{1}{s^2}=\frac{1}{1+\infty}=0$$

<u>Resumen :</u> Una rampa puede ser seguida en régimen permanente por sistemas tipo “2” y superiores.

<u>4.-Entrada parábola R(s)=1/s^3</u>

Sistema Tipo “0”,

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+\frac{K_0'\prod(s+z_j)}{s^0\prod(s+p_i)}}\frac{1}{s^3}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s^2G(s)}=\frac{1}{0}=\infty$$

Sistema Tipo “1”,

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+\frac{K_1'\prod(s+z_j)}{s^1\prod(s+p_i)}}\frac{1}{s^3}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s^2G(s)}=\frac{1}{0}=\infty$$

Sistema tipo “2”,

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+\frac{K_2'\prod(s+z_j)}{s^2\prod(s+p_i)}}\frac{1}{s^3}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s^2G(s)}=\frac{1}{K_2}$$

Sistema tipo “1”

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+\dfrac{K_1'\prod(s+z_j)}{s^1\prod(s+p_i)}}1=0\frac{1}{1+\dfrac{K_1'\prod z_j}{0\prod p_i}}1=0$$

Sistema tipo “2” y superiores

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+\dfrac{K_2'\prod(s+z_j)}{s^2\prod(s+p_i)}}1=0\frac{1}{1+\dfrac{K_2'\prod z_j}{0\prod p_i}}1=0$$

Resumen: Un impulso puede ser seguido en régimen permanente, sin error, por todos los tipos de sistemas.

2.-Entrada escalón R(s)=1/s

Sistema Tipo “0”

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+\dfrac{K_0'\prod(s+z_j)}{s^0\prod(s+p_i)}}\frac{1}{s}=\frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0}G(s)}=\frac{1}{1+K_0}$$

Sistemas Tipo “1” y mayores

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+\dfrac{K_1'\prod(s+z_j)}{s^1\prod(s+p_i)}}\frac{1}{s}=\frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0}G(s)}=\frac{1}{1+\infty}=0$$

Resumen: Un escalón puede ser seguido sin error, en régimen permanente, por los sistemas tipo uno y superiores.

3.- Entrada rampa R(s)=1/s∧2

Sistema tipo “0”

En general cualquier función transferencia puede ser escrita como:

$$G(s)=\frac{K_n(s+z_1)...(s+z_m)}{s^n(s+p_1)...(s+p_k)}=\frac{K_n\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{s^n\prod_{i=1}^{k}(s+p_i)} \qquad \text{donde}: n+k\geq m$$

Para los sistemas de realimentación unitaria el “tipo de sistema” se define según sea el valor de “n” en la expresión anterior. Es decir según el número de integraciones puras en la cadena directa.

Ejemplo:

$$G(s)=\frac{(s+1)}{s^2(s^2+3s+4)} \quad es\,de\,tipo\,2$$

El tipo de sistema indica que orden de señales de entrada puede “seguir” un sistema con error nulo en régimen estacionario. Aquí “el orden” se refiere a la potencia de s en la transformada de Laplace de la entrada. Para ver esto, investigaremos el error en estacionario para varios tipos de sistemas, debido a las señales de entrada: impulso R(s)=1, escalón R(s)=1/s, rampa R(s)=1/s∧2 y parábola R(s)=1/s∧3.
El error para el sistema de realimentación unitaria, se obtiene como:

$$E(s)=E_a(s)=R(s)-C(s)=\frac{1}{1+G(s)}R(s)$$

En régimen permanente, el error se obtiene aplicando el teorema del valor final, de la transformada de Laplace:

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G(s)}R(s)$$

<u>1.- Entrada Impulso: R(s)=1</u>

Sistema Tipo “0”

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+\frac{K_0'\prod(s+z_j)}{s^0\prod(s+p_i)}}1=0$$

ERROR EN ESTADO ESTACIONARIO. TIPOS DE SISTEMAS. COEFICIENTES DE ERROR.

Objetivo: Analizar el error en estado estacionario para sistemas con realimentación unitaria y no unitaria. Como así también definir el tipo de sistema, es decir a que señal de entrada es capaz de seguir, con error nulo en régimen permanente.

Introducción.
Considérese un sistema de control SISO, como el indicado en la figura 1

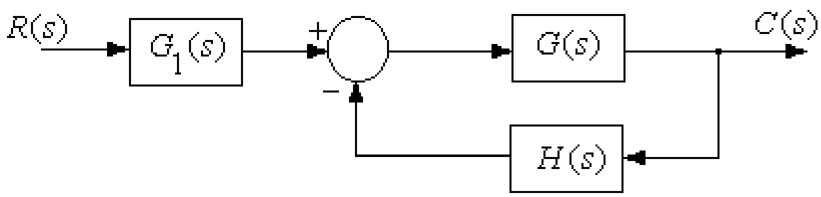

Fig. 1 Esquema de bloques para un control SISO

El error verdadero se define como la diferencia entre la entrada y la salida, mientras que el error actuante es la entrada al sistema G.

$$E(s) = R(s) - C(s) \quad (Error\ Verdadero)$$

$$E_a(s) = R(s)G_1(s) - H(s)C(s) \quad (Error\ Actuante)$$

La transferencia H(s) representa al sistema de medición, que generalmente realiza la medición de la variable controlada C(s) y la convierte en otra variable más conveniente de procesar y transmitir como ser, tensión, corriente, presión, etc. La transferencia G1(s) representa al elemento que convierte la referencia R en una variable adecuada para poder ser comparada con la salida de la medición. Cuando H(s) y G1(s) valen 1, se dice que el sistema es de realimentación unitaria y, para este caso los dos errores coinciden.

Sistemas con realimentación unitaria
Estos sistemas tienen un diagrama en bloques como el indicado en la figura 2.

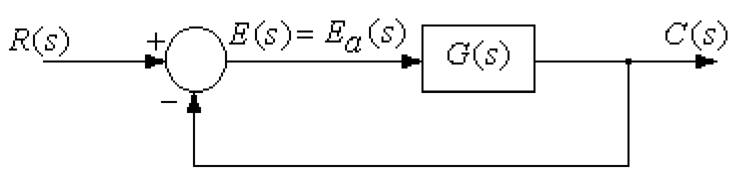

Fig. 2.Diagrama en bloques para un sistema de realimentación unitaria.